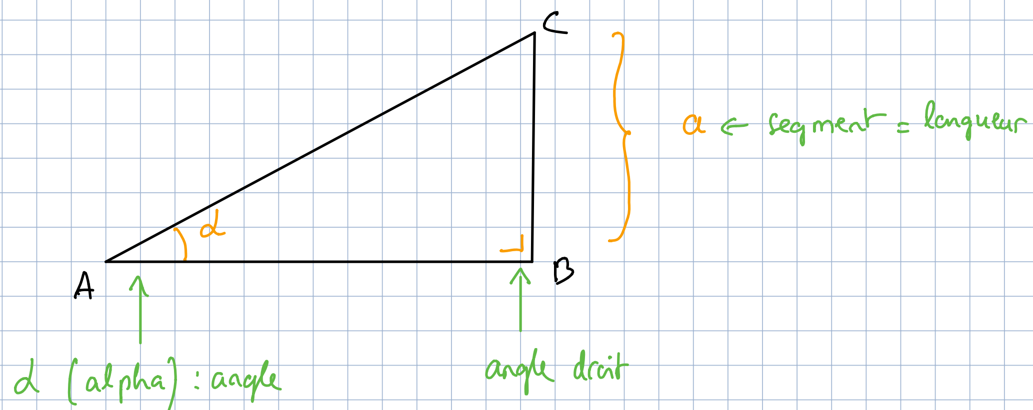
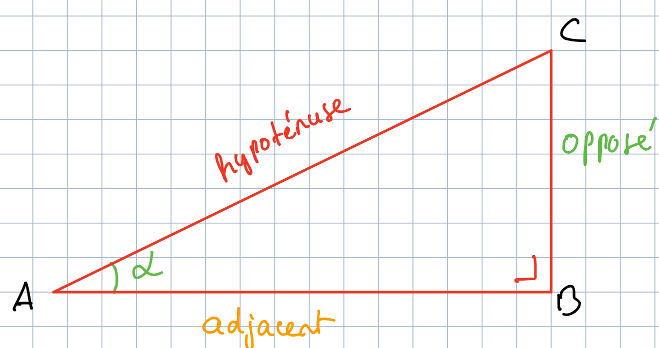
Trigonométrie dans le triangle rectangle

Rappel

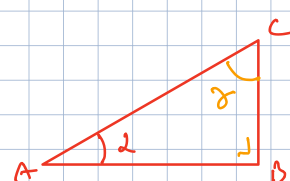
1) Un triangle rectangle est un triangle dont l'un des angles est droit (= 90°)



2) Relations trigonométriques :



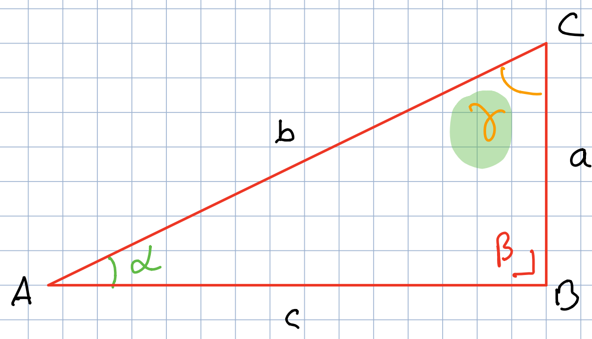
$$\sin(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$$



$$\cos(\alpha) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$$

Exemple :



α : alpha

β : bêta

γ : gamma

Ici $\beta = 90°$

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{a}{c}$$

On a également :

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{a}{\cancel{b}} \cdot \frac{\cancel{b}}{c} = \frac{a}{c}$$

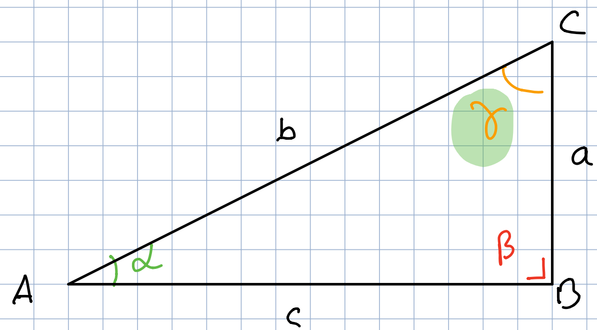
De même manière, on peut calculer :

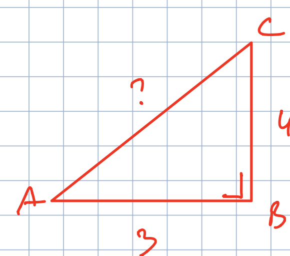
$$\sin(\gamma) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{c}{b}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{a}{b}$$

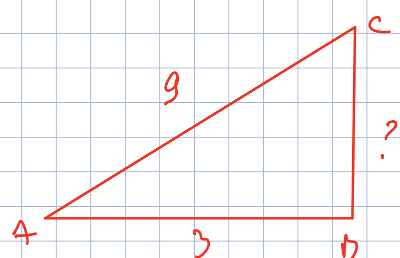
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{c}{a}$$

3) Théorème de Pythagore :





$$\boxed{a^2 + c^2 = b^2}$$

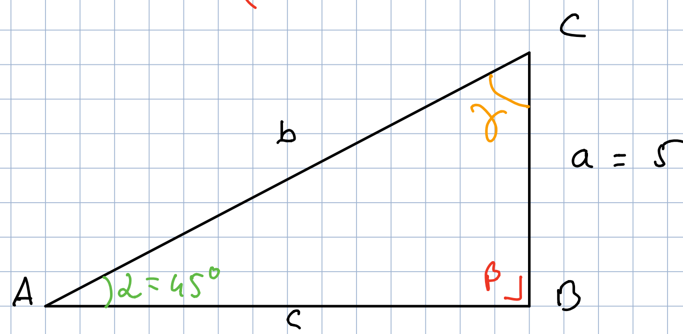


BC = ?

4) Exemple :

Soit ABC un triangle rectangle en B ($\beta = 90°$). On donne $\alpha = 45°$ et $a = 5$ cm.

Résoudre ABC. (c-à-d calculer b, c et γ)



a) $\sin(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{5}{b}$

$\Rightarrow \sin(45) = \frac{5}{b}$

(calculatrice)

$\Rightarrow 0{,}71 = \frac{5}{b} \Rightarrow b = \frac{5}{0{,}71} \cong 7{,}07$ cm

b) par Pythagore :

$a^2 + c^2 = b^2 \Rightarrow c^2 = b^2 - a^2 = (7{,}07)^2 - 25$

$\Rightarrow 50 - 25 = c^2$

$\Rightarrow 25 = c^2 \Rightarrow c = 5$ cm

c) La somme des mesures des angles d'un triangle est 180°

Ici on a : $\beta = 90°$ et $\alpha = 45°$

$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 45^\circ + 90^\circ + \gamma = 180^\circ$

$\Rightarrow \gamma = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ$

donc $\gamma = 45^\circ$

5) ~~Exercice~~ : À faire

Soit ABC un triangle rectangle en B. On donne

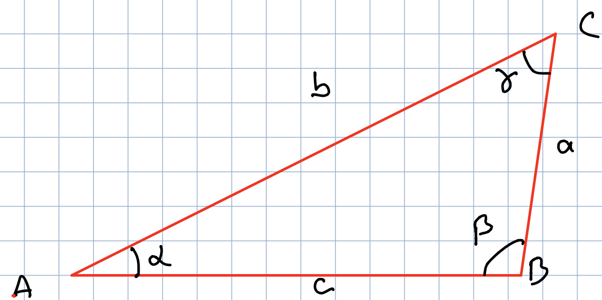
$\gamma = 30^\circ$ et $c = 2\,cm$.

Résoudre ABC : $\alpha = ?$; $a = ?$ et $b = ?$

Trigonométrie dans le triangle quelconque

1) Théorème du cosinus :

Dans tout triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres, diminuée du double produit de ces côtés par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent :



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

2) Théorème de l'aire :

L'aire d'un triangle est égale au demi-produit de deux de ses côtés par le sinus de l'angle qu'ils comprennent:

$$A = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma) = \frac{1}{2}ac\sin(\beta) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha)$$

3) Théorème du sinus :

Dans tout triangle, les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés :

$$\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}}$$